

Глава 2. Плоскости и моменты

§1. Плоскости. Векторное и скалярное урав-е



$\vec{n}$ - нормаль к плоскости
 M_0 - фиксированная точка плоскости
 M - произвольная точка на-ти

$$M \in \pi \iff \text{вектор } \vec{M_0M} \perp \vec{n}$$

$$\iff \vec{n} \cdot \vec{M_0M} = 0$$

Если r, r_0 - радиус-векторы точек M и M_0 , то
 $M_0M = r - r_0$

$$n(r - r_0) = 0 \quad \text{векторное урав-е плоскости}$$

В координатах $M = (x, y, z)$
 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$
 $n = (A, B, C)$

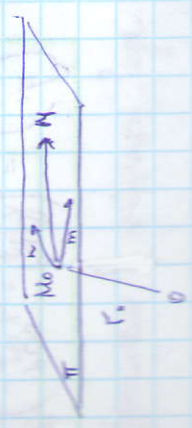
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{общее урав-е плоскости}$$

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

Стандартное урав-е плоскости

на на-ти задана точка $M_0 \in \pi$
 и 2 неколлинеарных вектора
 $\vec{m}, \vec{n}$



Если $m, n \in \pi$, то суж. вида t, u, s можно, что $M_0M = t\vec{m} + s\vec{n}$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{m} + s\vec{n} \quad \text{векторное параметрическое урав-е плоскости}$$

Векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ на-ти направляющих векторов плоскости.

Задача: плоскость, проходящая ч-м точек



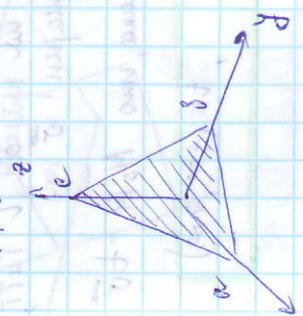
Пусть $M_1, M_2, M_3 \in \pi$ и не лежат на одной прямой
 M -любая точка π

Векторы $\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}, \vec{M_1M}$, M_1M_2, M_1M_3 коллинеарны, значит их смешан-ное произв-е равно 0.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Рассматривая случаи

$$M_1(a, 0, 0) \quad M_2(0, b, 0) \quad M_3(0, 0, c)$$



$$\begin{vmatrix} x - a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Разрешив по строке с нулями:

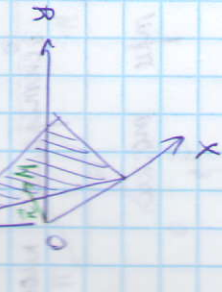
$$(x - a)bc + yac + abz(-z) = 0 \quad / : abc$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

урав-е на-ти δ тетраэдра

Нормальное упр. м-ти

Вектор $\vec{n}$ - единичный вектор нормали, направленный из начала координат в точку м-ти.



Р-плотность от $\vec{r}_0$ до м-ти

$M \in \Pi \sim$ оптимальная максимизация вектора $\vec{OM}$ на направлении $\vec{n} = \vec{p}$

$$\text{м.с. } \vec{n} \cdot \vec{OM} = |\vec{p}| \cdot |\vec{OM}| = p$$

$$M(x, y, z)$$

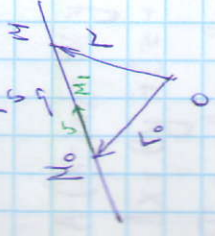
$$w(\cos, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

С2. Плоская в направлении

Транспарентное и каноническое упр. прямой

Вектор $\vec{OM}$ не равен нулю и направлен в сторону прямой, перпендикулярно ей.



Плоскость M имеет уравнение $L: \vec{r} \cdot \vec{n} = p$, вектор $\vec{OM}$ перпендикулярен $\vec{n}$

Это есть упр. t макс, имеем $\vec{OM} = t\vec{n}$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{n}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

упр. $\vec{r}$ имеет направление

Замечание в координатной форме

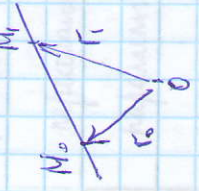
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad M_0(x_0, y_0, z_0) \quad M(x, y, z)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

каноническое упр.

Плоская, проходящая из где точка



Минимум δ канонического направления. Вектора $\vec{r}_0$ и $\vec{r}_1$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t = (1-t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1$$

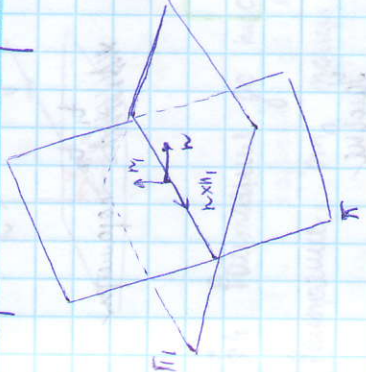
в координатах:

$$a = x_1 - x_0 \quad b = y_1 - y_0 \quad c = z_1 - z_0$$

магн

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Плоская как направление для максимизации



упр. максимизации

$$n \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

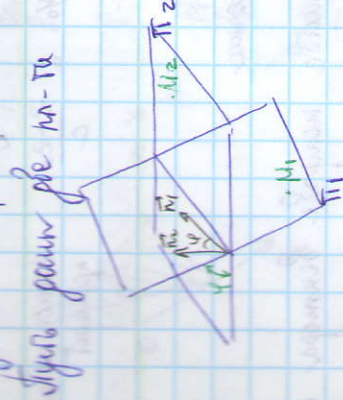
$$n \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Если $\vec{r}_0$ - объект макс-ти, то можно задать направление

$$t = (n \cdot n)t + t_0$$

§3. Взаимное перпендикулярность и параллельность

Взаимное перпендикулярность



$$\pi_1: n_1(r-r_1) = 0$$

$$\pi_2: n_2(r-r_2) = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{(n_1, n_2)}{|n_1| \cdot |n_2|}, \quad \Delta r = r_2 - r_1$$

Параллельность

и не

перпендикулярность

параллельны, но не совпадают

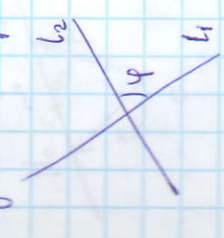
совпадают

$$n_1 \times n_2 \neq 0$$

$$n_1 \times n_2 = 0 \quad n_1 \Delta r \neq 0$$

$$n_1 \times n_2 = 0 \quad n_1 \Delta r = 0$$

Взаимное перпендикулярность



$$l_1: r = r_1 + v_1 t_1$$

$$l_2: r = r_2 + v_2 t_2$$

$$\cos \varphi = \frac{|v_1 \cdot v_2|}{|v_1| \cdot |v_2|}$$

t_1, t_2
векторы направления

Параллельность

эквивалентность

перпендикулярность

параллельны, но не совпадают

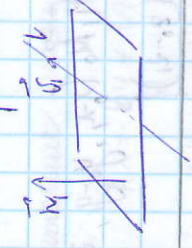
$$(v_1, v_2, \Delta r) \neq 0$$

$$(v_1, v_2, \Delta r) = 0 \quad v_1 \times v_2 \neq 0$$

$$v_1 \times v_2 = 0 \quad v_1 \times \Delta r \neq 0$$

совпадают

Взаимное перпендикулярность и эквивалентность



$$l: r = r_1 + v_1 t_1$$

$$\pi: n_2(r - r_2) = 0$$

Параллельность

и не

перпендикулярность

$$v_1 \cdot n_2 \neq 0$$

параллельны

$$v_1 \cdot n_2 = 0 \quad \Delta r \cdot n_2 \neq 0$$

совпадают

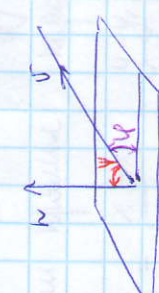
$$v_1 \cdot n_2 = 0 \quad \Delta r \cdot n_2 = 0$$

Угол между плоскостями и взаимное

стояние

$$l: r = r_0 + t \vec{\sigma}$$

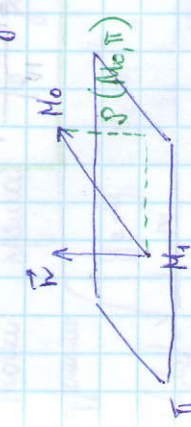
$$\pi: n(r - r_1) = 0$$



$$\sin \varphi = \frac{|(\vec{\sigma}, \vec{n})|}{|\vec{\sigma}| \cdot |\vec{n}|}$$

§4 Параллельность по координатам и по уравнениям

Параллельность по уравнениям



$$M_1 \in \pi \quad |\vec{n}| = 1$$

единичный вектор нормали

$$p(M_0, \pi)$$

расстояние от т. M0 до п-ты π

$$p(M_0, \pi) = |p \vec{n} \cdot \vec{M_1 M_0}| = |(n, M_1 M_0)|$$

Если $m=0$ π $\rightarrow$ $AX+BY+CZ+D=0$
 тогда $n = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \quad M_1(x_1, y_1, z_1) \Rightarrow \vec{M_0 M_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$$

$$\text{длина } p(M_0, \pi) = \frac{|A(x_0-x_1) + B(y_0-y_1) + C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$p(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

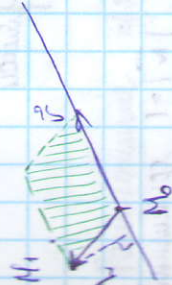
$$p(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

координаты $T.M_0$ известны δ yp e $направление$
 параллельно $OT.M_0$ $по$ m - tu π .

Расстояние от точки $по$ $нормали$

$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad \vec{l} = (l, m, n)$$



Строим $кор-M$ $на$ $Земле$ $\vec{l}$ $и$ $M_0 M_1$

$$L = \frac{|\vec{M_0 M_1} \times \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

δ $координат$

$$\vec{M_0 M_1} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}$$

$$L = p(M, L) = \sqrt{\frac{\left| \frac{y_1-y_0}{z_1-z_0} \cdot \frac{m}{n} \right|^2 + \left| \frac{x_1-x_0}{z_1-z_0} \cdot \frac{l}{n} \right|^2 + \left| \frac{x_1-x_0}{y_1-y_0} \cdot \frac{l}{m} \right|^2} \sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Расстояние между $прямой$ $и$ $плоскостью$

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$



Если $направляющий$, $то$ $расстояние$ $от$ $прямой$
 $по$ m - tu $есть$ $расстояние$ $от$ $прямой$ $до$ $плоскости$

$$p(l, \pi) = p(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Если $l \perp \pi$, $то$ $расстояние$ $равно 0$.

Расстояние между $прямой$

Если $прямые$ $параллельны$

$$l_1 = \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$l_2 = \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

Каким образом $вычислить$ $расстояние$ $от$ $прямой$ $до$ $прямой$

$$p(l_1, l_2) = \sqrt{\frac{\left| \frac{y_2-y_1}{m_1} \cdot \frac{z_2-z_1}{n_1} \right|^2 + \left| \frac{x_2-x_1}{l_1} \cdot \frac{z_2-z_1}{n_1} \right|^2 + \left| \frac{x_2-x_1}{l_1} \cdot \frac{y_2-y_1}{m_1} \right|^2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}}$$

векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены

тангенциально к окружности в радиусе r

векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r

$$p(l_1, l_2) = \frac{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$$

$$(l_1, l_2) = \sqrt{\frac{m_1^2 m_2^2}{n_1^2 n_2^2} + \frac{l_1^2 l_2^2}{m_1^2 m_2^2} + \frac{l_1^2 l_2^2}{n_1^2 n_2^2}}$$

Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r

$$r = r_1 + v_1 S$$

$$r = r_2 + v_2 t$$

Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r

Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r

$$v_2 - v_1 = (r_2 - r_1) + t_0 v_2 - S_0 v_1$$

Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r

$$(n_2 - n_1) v_1 = 0$$

$$(n_2 - n_1) v_2 = 0$$

$$\begin{cases} (r_2 - r_1) v_1 + t_0 v_1 v_2 - S_0 v_1^2 = 0 \\ (r_2 - r_1) v_2 + t_0 v_2^2 - S_0 v_1 v_2 = 0 \end{cases}$$

Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r

Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r

$$\begin{vmatrix} v_1^2 & -v_1 v_2 \\ v_1 v_2 & -v_2^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \\ v_1 v_2 & v_2^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r

Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r

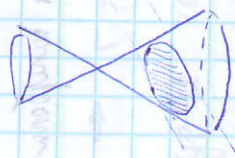
Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r

$$\begin{cases} (v_1 v_2, v_1, r - r_1) = 0 & \text{упр-е } m-ти, \text{ содержит } \pm \text{ую прямую и окружн-ть} \\ (v_1 v_2, v_2, r - r_2) = 0 & \text{--//-- 2-ую прямую и окружн-ть} \end{cases}$$

Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r

Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r

Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r



Векторы v_1, v_2 и M_1, M_2 направлены тангенциально к окружности в радиусе r